



ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO

Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES

Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

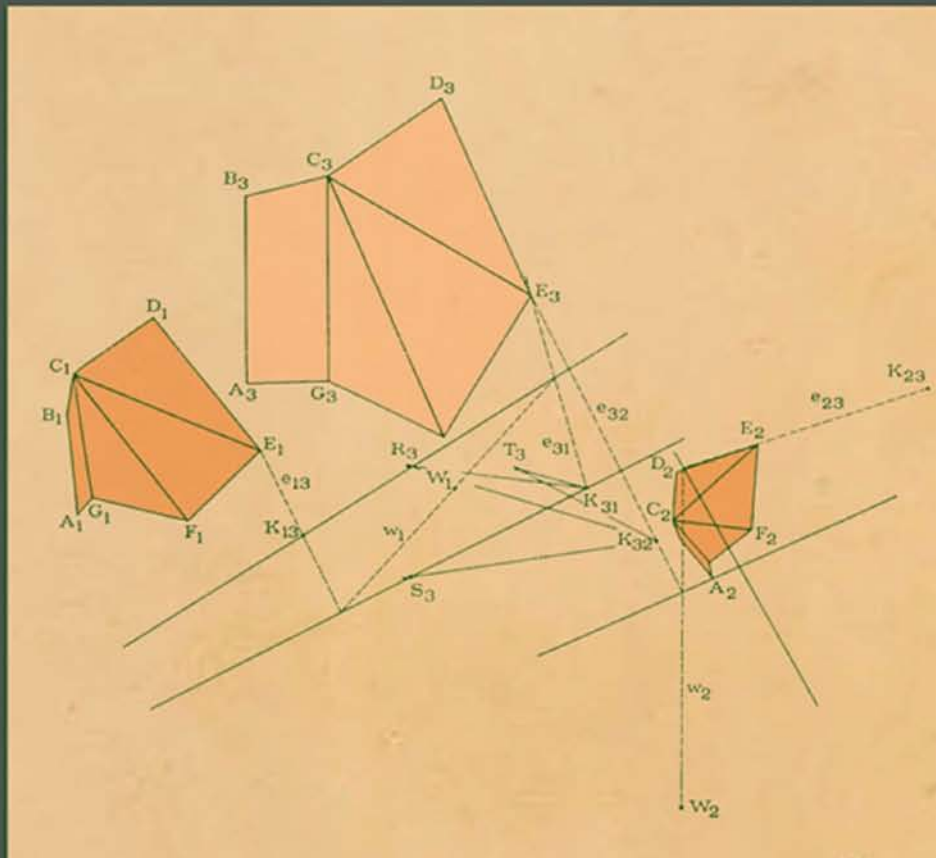
Palermo, Italia

XII INTERNATIONAL SYMPOSIUM
OF ARCHITECTURAL PHOTOGRAMMETRY

Roma

Giuseppe Maria Catalano

DUE METODI PER LA RESTITUZIONE GRAFICA
DA UNA COPPIA DI FOTOGRAMMI COMUNQUE ORIENTATI



Roma 24, 25, 26 ottobre 1989

DUE METODI PER LA RESTITUZIONE GRAFICA DA UNA COPPIA DI FOTOGRAMMI COMUNQUE ORIENTATI

GIUSEPPE MARIA CATALANO

DIPARTIMENTO DI RAPPRESENTAZIONE, UNIVERSITA' DI PALERMO

Via Cavour n.118, PALERMO, ITALIA.

Ottenere da due fotogrammi di un oggetto, comunque orientati, la proiezione ortogonale dello stesso su una qualsiasi giacitura prefissata, implica, anzitutto, la ricostruzione dell'orientamento reciproco della coppia nello spazio, la conoscenza cioè, delle condizioni di presa, poiché i due fasci proiettanti i punti delle immagini, disponendosi nella posizione originale, s'intersecano nei punti dell'oggetto.

Ma è possibile trovare l'orientamento avendo a disposizione soltanto le due immagini fotografiche e ignorando del tutto le condizioni originali di presa?

Come si ricorderà se π_1 e π_2 sono i piani dei due fotogrammi, aventi centri di proiezione in V_1 e V_2 , vengono detti "nuclei" o "fulcri" i punti in cui la congiungente V_1 e V_2 interseca π_1 e π_2 .

Il tracciamento dei nuclei sui due fotogrammi permetterebbe la ricostruzione dell'orientamento e la conseguente restituzione dell'oggetto.

Per comprendere ciò occorre rifarsi al teorema fondamentale della fotogrammetria secondo cui "le proiezioni A_1 e A_2 di un punto A dello spazio fatte da due centri arbitrari V_1 e V_2 su due piani qualunque π_1 e π_2 sono congiunte ai due relativi fulcri K_{12} e K_{21} per mezzo di due rette segantisi sull'intersezione f dei due piani di proiezione" (Fig. 1).

Tale proposizione afferma, in definitiva, che considerando le proiezioni dei punti dell'oggetto sui due fotogrammi, nascono due fasci prospettivi aventi centro nei nuclei ed è immediato dedurre che spostando comunque i due piani π_1 e π_2 dalla posizione orientata originale, tali fasci non siano più prospettivi, ma continuino ad essere proiettivi.

Se dunque assumiamo come quadro su cui ottenere la proiezione ortogonale dell'oggetto

secondo il centro V_{300} , un qualsiasi piano π_3 appartenente al fascio di asse $K_{12} - K_{21}$ possiamo, anzitutto, data la fuga f_1 di π_3 e π_1 trovare la corrispondente f_2 su π_2 , e viceversa, appartenendo f_1 e f_2 ai due fasci prospettivi di nuclei K_{12} e K_{21} (Fig.2).

Inoltre fra π_1 e π_3 ovvero tra l'immagine dell'oggetto su π_1 e la proiezione ortogonale su π_3 , può instaurarsi una seconda prospettiva fra i fasci aventi per nuclei K_{13} e K_{31} intersezioni della retta $V_1 - V_{300}$ con π_1 e π_3 , punti di immediato tracciamento, essendo K_{31} coincidente con V_1 e K_{13} il punto di fuga delle ortogonali al piano π_3 di cui è nota la fuga f_1 . Potendosi ripetere analoghe considerazioni nei confronti di π_2 e π_3 , si ottengono, in definitiva, tre prospettività che non solo permettono di ricostruire l'orientamento, imponendo sui due fotogrammi la coincidenza delle rette $V - K_{12}$, e $V_2 - K_{21}$, ma forniscono anche direttamente la proiezione ortogonale richiesta come intersezione fra le rette dei due fasci giacenti su π_3 .

Tale metodo, tuttavia, implica la conoscenza dei nuclei K_{12} e K_{21} , coincidenti con le immagini dei due centri V_1 e V_2 sui due fotogrammi: occorrerebbe allora fotografare da una stazione di ripresa non soltanto l'oggetto da restituire, ma anche l'altra stazione e viceversa, o almeno avere su uno dei fotogrammi l'immagine di una stazione cioè un nucleo, poiché in tal caso è possibile ricavare con mezzi proiettivi l'altro (1). Ma anche quest'ultima circostanza è spesso di difficile attuazione e ricavare i due nuclei, esterni ai fotogrammi, senza imporre alcuna condizione, basandosi cioè soltanto su alcune coppie di punti corrispondenti, resta ancora un problema dalla soluzione assai complessa.

Possibile è invece il ritrovamento dei nuclei col procedimento proposto da G. Loria, considerando nei due fotogrammi le immagini di sei punti dei quali quattro appartenenti ad un piano (2), sebbene tale procedimento, generalmente applicabile nei manufatti architettonici, richieda l'intervento di diversi fasci proiettivi, rendendo nel complesso un po' laborioso il metodo generale già esposto.

Poco dopo l'elaborazione di questo, ho dunque definito un secondo metodo che pur usufruendo di due fotogrammi comunque orientati, non richiede la ricerca dei nuclei K_{12} e K_{21} , ma ricostruisce indirettamente l'orientamento della coppia.

Consideriamo ancora i piani π_1 e π_2 dei fotogrammi ed un qualsiasi piano π_3 avente la giacitura assegnata, su cui si desidera ottenere la proiezione ortogonale del manufatto (Fig.3): la congiungente il centro V_1 col centro improprio V_{300} , la parallela cioè per V_1 alla direzione di V_{300} fornisce per intersezione sui due piani π_1 e π_3 rispettivamente i nuclei K_{13} e K_{31} ; allo stesso modo la congiungente V_2 con V_{300} fornisce per intersezione sui due piani π_2 e π_3 rispettivamente i nuclei K_{23} e K_{32} .

E' possibile allora legare le immagini del corpo su π_1 e π_3 tramite la proiettività tra i fasci di rette aventi centro nei nuclei K_{13} e K_{31} e le immagini su π_2 e π_3 tramite la seconda proiettività, avente per centri K_{23} e K_{32} .

In definitiva, note le due immagini fotografiche dell'oggetto C su π_1 e π_2 , noti i quattro nuclei suddetti, se ne trae che i due fasci di rette aventi centro in K_{31} e K_{32} opportunamente disposti, forniscono per intersezione la proiezione ortogonale di C su π_3 .

Per individuare la giacitura prescelta per la restituzione e insieme permettere la ricostruzione dell'orientamento si considerino nello spazio due generici segmenti, definiti da elementi esterni o appartenenti al corpo C , nell'esempio il poliedro A, B, \dots, E (Fig.4)

e individuanti un piano π_3 avente la giacitura assegnata.

Supponiamo che ciascuno di essi sia diviso in due parti secondo rapporti noti: tale circostanza permette di individuare allora i punti di fuga delle rette cui i segmenti appartengono. Prendiamo in esame, ad esempio, il primo fotogramma e consideriamo il segmento R_1S_1 sulla retta p' suddiviso prospetticamente in R_1L_1 ed L_1S_1 (Fig.4); tracciamo per S_1 una qualsiasi retta e , fissando S_1 come traccia, riportiamo su di essa due segmenti RL ed LS secondo il rapporto reale noto.

I segmenti R_1S_1 ed RS_1 individuano un piano ω , la cui traccia deve contenere RS_1 ; pertanto la retta $f'\omega$, parallela alla traccia suddetta e passante per F' d'intersezione di RR_1 ed LL_1 , interseca la p' nel punto di fuga F'_p richiesto.

Tracciati in tal modo i punti di fuga, propri o impropri, delle rette contenenti i due segmenti, risulta definita sui due fotogrammi la retta di fuga f'_{π_3} del piano π_3 e cioè l'immagine della giacitura prescelta.

Prima di esporre le operazioni necessarie alla ricostruzione dell'orientamento della coppia, è bene precisare che questa fase di ricerca della giacitura può effettuarsi in vari modi, ricorrendo sempre ad elementi geometrici esterni o appartenenti al manufatto da rilevare.

Supponiamo, per esempio, di ritrovare su quest'ultimo, o su edifici prossimi, elementi individuanti due segmenti uguali e paralleli (due lesene, due spigoli, etc.) appartenenti ovviamente alla giacitura prescelta (Fig.5). Consideriamo nel fotogramma gli estremi $R_1S_1T_1U_1$ dei due elementi definiti in generale nello spazio un parallelogramma, nell'esempio un rettangolo: i lati di tale parallelogramma fuggono in F'_1 ed F'_2 (quest'ultimo nell'esempio è all'infinito), sicché è subito individuata nella retta f'_{π_3} congiungente questi ultimi, la prospettiva della giacitura assegnata. Ottenuta, comunque sia, la prospettiva f'_{π_3} sui due fotogrammi, occorre individuare velocemente i quattro nuclei necessari all'esecuzione del metodo.

Restituito l'orientamento interno del fotogramma (punto principale e distanza principale) è noto V_0 , punto di fuga delle ortogonali al quadro, ed il centro di proiezione V_1 ribaltato in (V_1) sul quadro.

Tornando quindi al fotogramma di quest'ultimo esempio, il punto di fuga delle ortogonali alla giacitura assegnata fornirà immediatamente il nucleo K_{13} (Fig.5).

Se poi fissiamo come quadro π_3 il piano proiettante f'_{π_3} (e cioè la giacitura), allora il secondo nucleo K_{31} sarà subito fornito dalla posizione assunta da V_1 dopo il ribaltamento di tale quadro sul piano del fotogramma.

Proiettiamo, poi, su π_1 tre estremi dei due segmenti dall'infinito ortogonalmente al piano proiettante suddetto, proiettiamo cioè R_1, S_1, T_1 da K_{13} su f'_{π_3} , traccia fuga di π_3 in R'_3, S'_3, T'_3 .

Per tracciare i punti R_3, S_3, T_3 , ottenuti dal ribaltamento del piano sul quadro del fotogramma, consideriamo che essi dovranno appartenere alle proiettanti R'_3, S'_3, T'_3 da K_{31}

(V_1 ribaltato) ed, insieme a rette aventi la direzione $K_{31} F'_2$ e $K_{31} F'_1$: pertanto nota la lunghezza di un elemento e stabilita la scala metrica di restituzione, restano immediatamente fissati i segmenti $R_3 S_3$ e, conseguentemente, $R_3 T_1$, determinando così la terna di punti restituiti necessari per instaurare il legame proiettivo.

Allo stesso modo possono tracciarsi sul secondo fotogramma i due nuclei K_{23} e K_{32} ed i relativi fasci prospettivi, determinando ancora la terna R_3, S_3, T_3 di punti restituiti.

Potremmo adesso ottenere rapidamente l'intera immagine restituita sovrapponendo le terne, R_3, S_3, T_3 ottenute sui due fotogrammi: le due prospettività fornirebbero, come si è detto, per ciascuna coppia di immagini di uno stesso punto sui due fotogrammi una coppia di rette, la prima appartenente al fascio di centro K_{31} , la seconda appartenente al fascio di centro K_{32} determinanti per intersezione l'immagine restituita del punto stesso.

Tuttavia ciò implica spesso la sovrapposizione dei due fotogrammi e dell'immagine restituita.

Riferendosi nuovamente al primo fotogramma (Fig. 6), possiamo allora spostare liberamente il fascio avente centro nel nucleo K_{31} insieme alla terna R_3, S_3, T_3 ad esso appartenente (servendosi anzi delle rette $R_3 - S_3$ e $R_3 - T_3$ come assi di un sistema di riferimento cui riferire il nucleo) e ricavare il centro di collineazione W_1 e gli assi necessari per instaurare il legame proiettivo con il fascio di rette di centro K_{13} , cui appartengono R_1, S_1, T_1 .

Analoga operazione può effettuarsi per il secondo fotogramma, ottenendo il centro di collineazione W_2 e i relativi assi. Sovrapponiamo quindi (Fig.7) ancora una volta le due terne R_3, S_3, T_3 appartenenti ai fasci di centro K_{31} e K_{32} : l'immagine E_3 del generico punto E sarà fornita come intersezione della retta e_{31} , corrispondente alla e_{13} nella proiettività relativa al primo fotogramma, con la retta e_{32} , corrispondente alla e_{23} nella proiettività relativa al secondo fotogramma.

Tale intreccio di proiettività permette così di disporre liberamente immagini fotografiche e immagine restituita secondo le necessità dell'operatore.

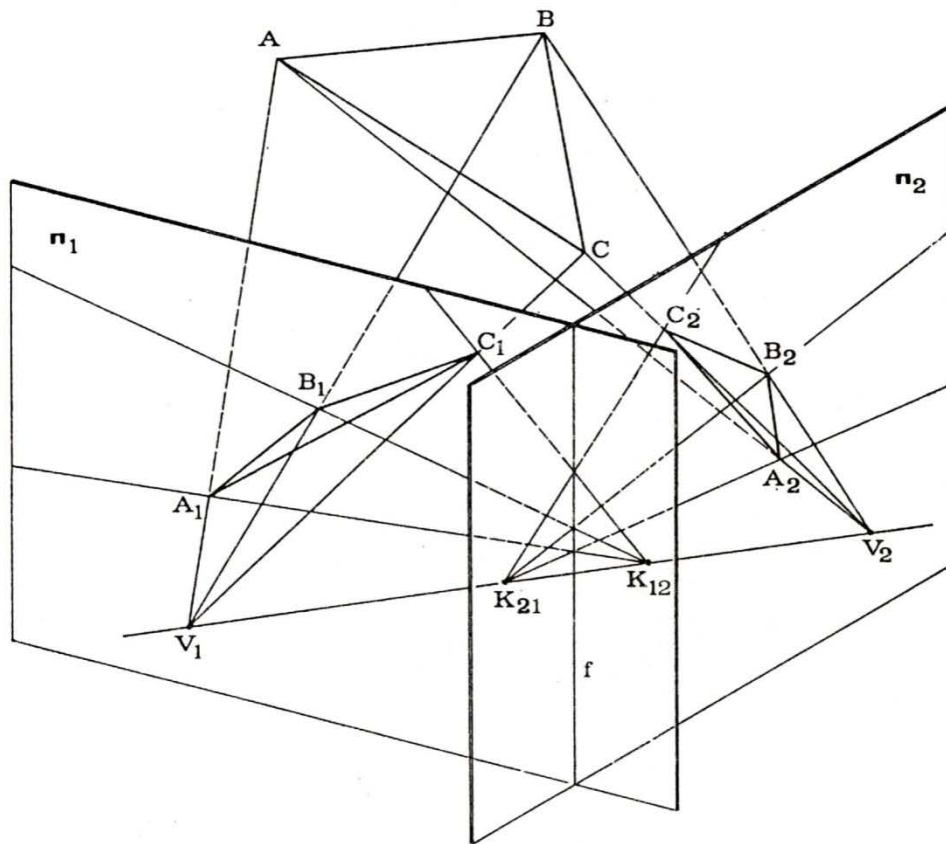
Quest'ultimo metodo appare dunque, in molti casi, più conveniente del primo, consentendo rapidità esecutiva e massima generalità di applicazione. Basti pensare alla scelta della giacitura, che nel primo metodo è limitata ai piani del fascio di asse $V_1 - V_2$ e alla libertà del secondo riguardo alla collocazione dei fotogrammi e dell'immagine restituita, libertà che prima era del tutto assente.

Tuttavia quel primo procedimento si pone come caposaldo verso il raggiungimento, speriamo prossimo, di una restituzione grafica basata soltanto su alcune coppie di punti corrispondenti, liberamente scelti sui due fotogrammi, punti che permettano anche la restituzione dell'orientamento interno, in modo da raggiungere l'ambita meta della restituzione da foto di archivio di qualsiasi manufatto non più esistente.

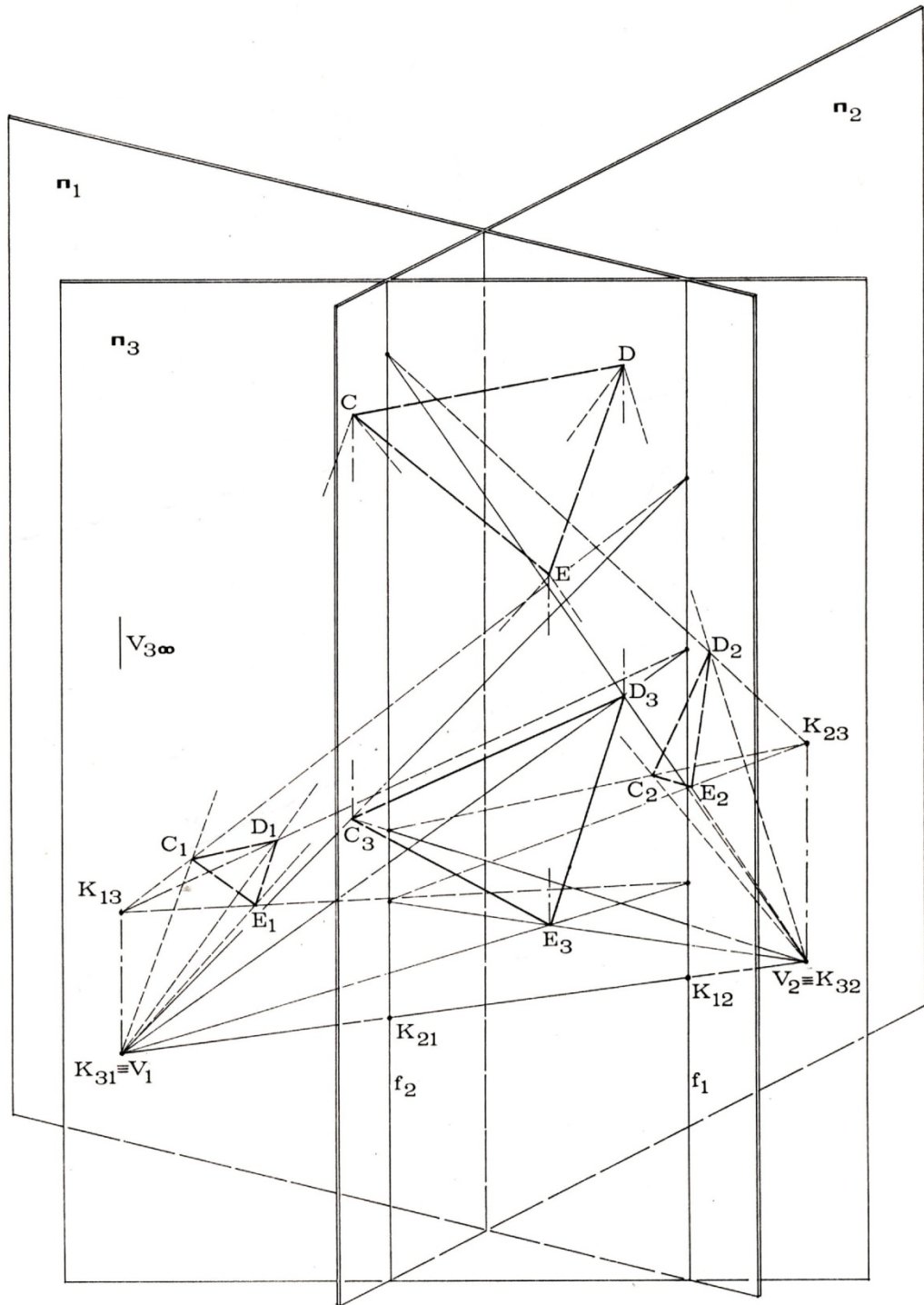
4

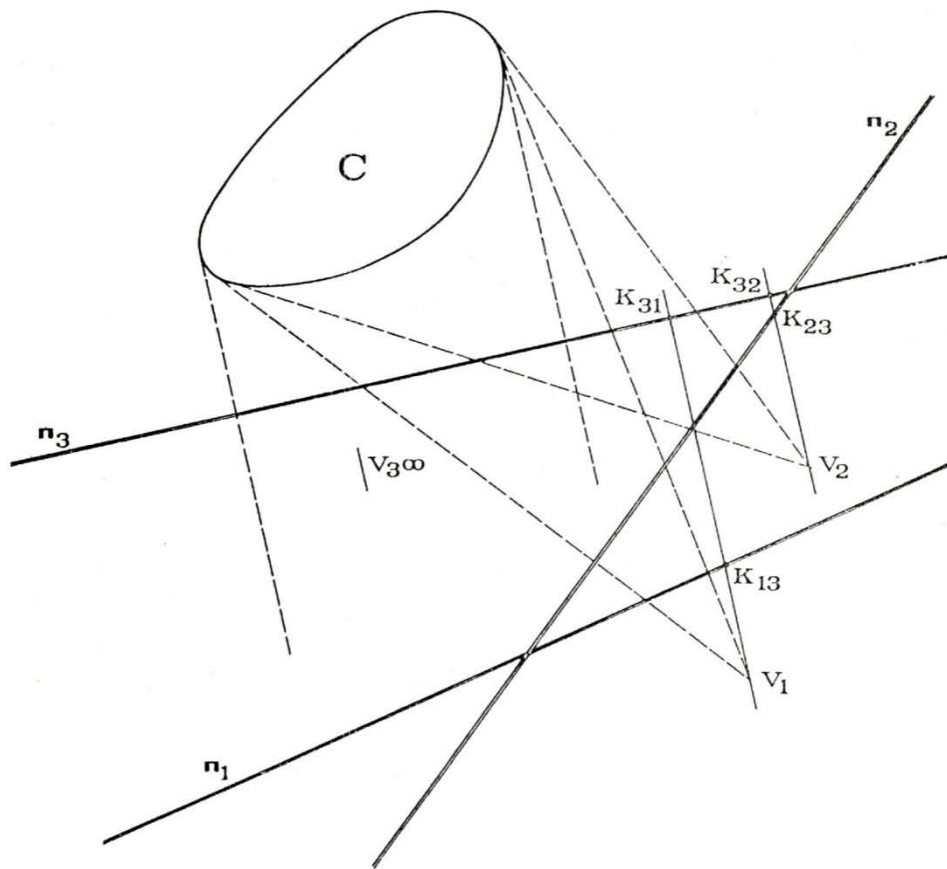
N O T E

- (1) Noto, infatti, un nucleo e cinque coppie di punti corrispondenti sui due fotogrammi, è possibile individuare due coniche distinte contenenti il nucleo dato e quattro dei cinque punti noti. Le coniche corrispondenti alle prime due sul secondo fotogramma sono tracciabili, poiché sono capaci dello stesso birapporto delle prime due, sicché è noto dalla loro intersezione il secondo nucleo cercato. Si veda in proposito G. LORIA, Metodi di Geometria Descrittiva, U. HOEPLI, Milano 1925.
- (2) GINO LORIA, Metodi di Geometria Descrittiva, U. HOEPLI, Milano 1925.

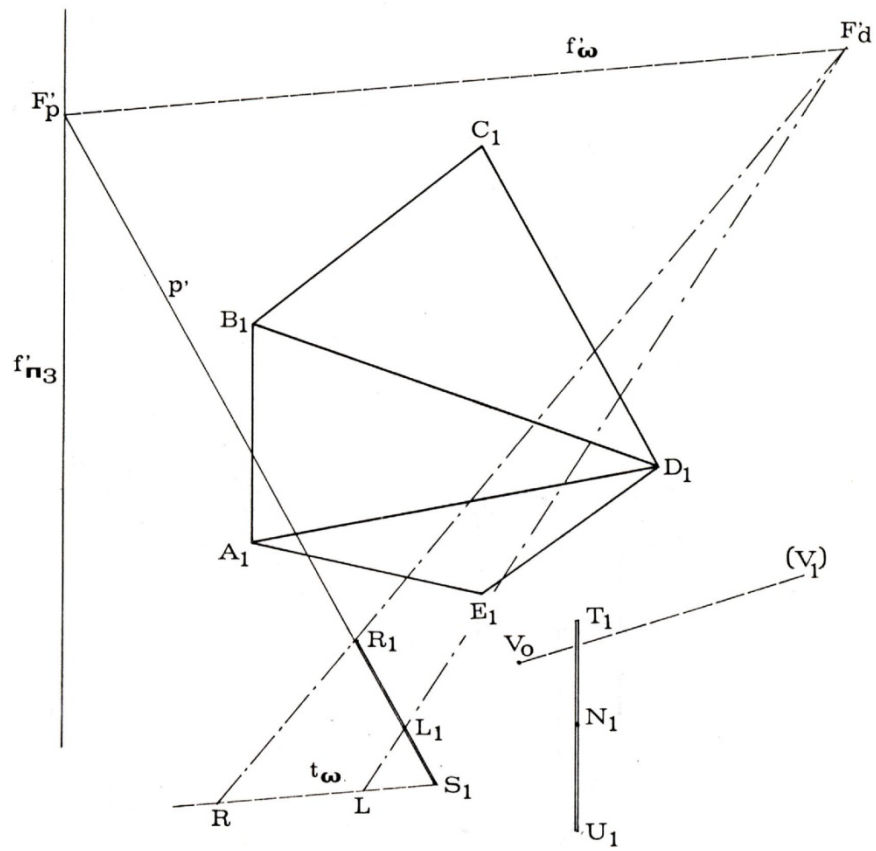


F.1

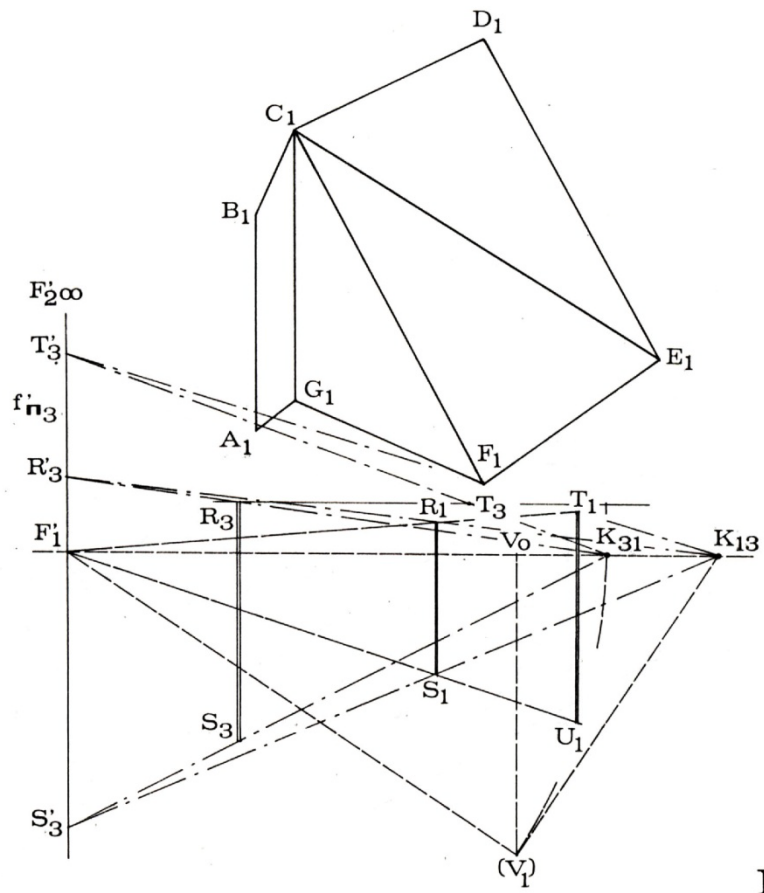




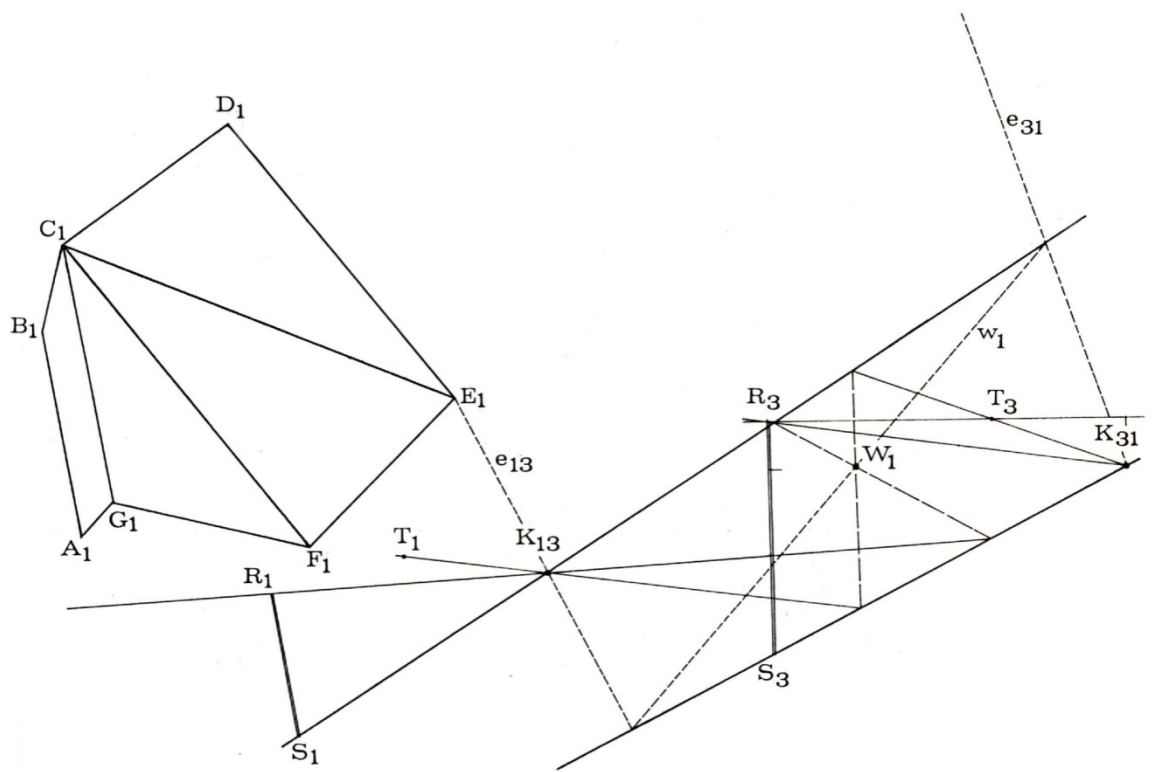
F.3



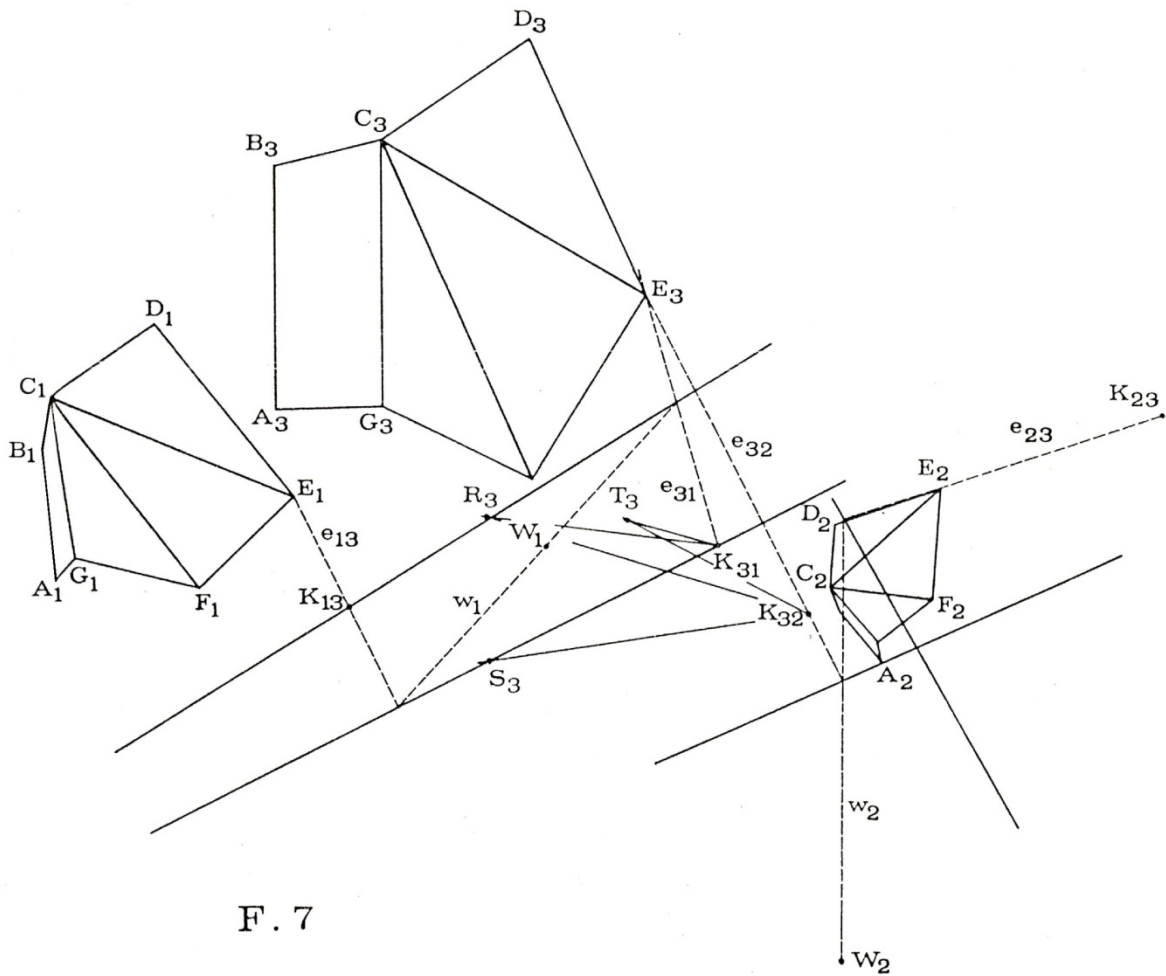
F.4



F.5



F.6



F. 7